Appunti di matematica ins. : A. Di Rocco

RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI CON LA REGOLA DI CRAMER

Ricordiamo che un sistema lineare di n equazioni in n incognite, può essere:

determinato :	Se esiste una sola n-pla di soluzioni
indeterminato:	Se ammette infinite n-ple di soluzioni
impossibile:	Se non esiste alcuna n-pla di numeri reali che sia soluzione del sistema

Abbiamo imparato a risolvere i sistemi lineari a due incognite con vari metodi ora vogliamo imparare a risolvere con il metodo di Cramer quelli a tre incognite.

RICORDIAMO IL METODO DI CRAMER PER I SISTEMI A DUE INCOGNITE:

Il sistema deve essere ordinato in modo da avere i termini noti di ogni equazione a destra del segno di uguale e le incognite con lo stesso nome incolonnate a sinistra del segno uguale

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,1}y = b_2 \end{cases}$$

N.B.: i coefficienti a_{ij} sono tali che il primo pedice indica la riga e il secondo la colonna.

x, y sono le incognite del sistema

$a_{i,j}$ sono i coefficienti del sistema

b_i sono i termini noti del sistema

1) Si scrive la matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

e si calcola il suo determinante che indicheremo

con D

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1}$$

SE D non è nullo il sistema è determinato e procediamo :

2) Si calcola il determinante D_x della matrice ottenuta dalla precedente sostituendo alla prima colonna, i termini noti del sistema

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_{2,} & a_{2,2} \end{vmatrix} = b_1 * a_{2,2} - a_{1,2} * b_2$$

3) Si calcola il determinante D_y della matrice ottenuta dalla prima sostituendo alla seconda colonna, i termini noti del sistema

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_{1,} \\ a_{2,1} & b_{2,} \end{vmatrix} = a_{1,1} * b_{2,} - b_1 * a_{2,1}$$

il valore delle incognite è dato dai seguenti rapporti tra i determinanti calcolati in precedenza:

$x = D_x / D$ **$y = D_y / D$**

NOTA BENE: se $D = 0$ il sistema è indeterminato o impossibile

LA REGOLA DI CRAMER - SISTEMA LINEARE DI TRE EQUAZIONI IN TRE INCOGNITE :

Il sistema deve essere ordinato in modo da avere i termini noti di ogni equazione a destra del segno di uguale e le incognite con lo stesso nome incolonnate

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \end{cases}$$

x,y,z sono le incognite del sistema

$a_{i,j}$ sono i coefficienti del sistema

b_i sono i termini noti del sistema

1) Si scrive la matrice dei coefficienti e si calcola il suo determinante che indicheremo con D

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

SE $D \neq 0$ il sistema è determinato e si procede

2) si calcola il determinante D_x della matrice ottenuta dalla precedente sostituendo alla prima colonna, i termini noti del sistema

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

3) si calcola il determinante D_y della matrice ottenuta dalla prima sostituendo alla seconda colonna, i termini noti del sistema

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

4) si calcola il determinante D_z della matrice ottenuta sempre dalla prima sostituendo alla terza colonna, i termini noti del sistema

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

il valore delle incognite è dato dai seguenti rapporti tra i determinanti calcolati in precedenza:

$x = D_x / D$

$y = D_y / D$

$z = D_z / D$

NOTA BENE: se $D = 0$ il sistema è indeterminato o impossibile

Il problema è calcolare il determinante di matrici 3x3

Per le matrici di ordine 3x3 (Solo per queste!) si può applicare la regola di Sarrus per il calcolo del determinante.

Si deve calcolare

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1) Si riportano le prime due colonne alla destra della matrice:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

2) Si eseguono tutti i prodotti lungo le diagonali principali:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{22} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

e si sommano i risultati:

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \quad + \quad a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \quad + \quad a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$

3) Si eseguono tutti i prodotti lungo le diagonali secondarie:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{22} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}$$

poi si cambia loro il segno e si sommano algebricamente i risultati a quelli ottenuti dalle diagonali principali:

$$- \; a_{13}\, a_{22}\, a_{31} \; - \; a_{23}\, a_{32}\, a_{11} \; - \; a_{33}\, a_{12}\, a_{21}$$

Quindi il determinante D è :

$$\boldsymbol{D} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} + \\ - \; a_{13}\, a_{22}\, a_{31} \; - \; a_{23}\, a_{32}\, a_{11} \; - \; a_{33}\, a_{12}\, a_{21}$$

ESEMPIO

Risolvere il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite con la regola di Cramer

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y - z = 4 \\ 2x + 2y - 3z = -3 \end{cases}$$

Si calcola il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} = -9 -2 -2 - (-6 -2 -3) = -13 +11 = -2$$

$D \neq 0$ quindi calcoliamo gli altri tre determinanti:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{matrix} = 0+3 -8 -(+9+0-12) = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{matrix} = -12 +0 +3 - (-8 +3 +0) = -4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} = -9 +8 +0 - (0+8 -3) = -6$$

Si determinano i valori delle tre incognite:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$